On negative eigenvalues of Schrodinger operators in magnetic fields with Robin boundary conditions (Spectral and Scattering Theory and Related Topics)

AUTHOR(S):

峯, 拓矢

CITATION:

峯, 拓矢. On negative eigenvalues of Schrodinger operators in magnetic fields with Robin boundary conditions (Spectral and Scattering Theory and Related Topics). 数理解析研究所講究録 2001, 1208: 183-192

ISSUE DATE:

2001-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/41069

数理解析研究所講究録 1208 巻 2001 年 183-192

On negative eigenvalues of Schrödinger operators in magnetic fields with Robin boundary conditions

京都大学大学院 理学研究科 峯 拓矢 (Takuya Mine)
Division of Mathematics, Graduate School of Science,
Kyoto University

1 序

d 次元ユークリッド空間内の開集合 Ω における磁場中の Schrödinger 作用素は, 形式的には次で与えられる微分作用素 L である:

$$Lu=\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{1}{i}\partial_{x_j}-a_j\right)^2u+Vu.$$

但し, u は L の定義域に属する関数であり, $i=\sqrt{-1}$, $\partial_{x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}$. a_j, V は実数値関数による掛け算作用素であり, 本稿では

$$a_j\in L^2_{loc}(\Omega),\ (j=1,\cdots,d),\ V\in L^1_{loc}(\Omega),\ V\geq 0 \tag{1.1}$$

を常に仮定する. 慣用にしたがって, しばしば $L=\left(\frac{1}{i}\nabla-\boldsymbol{a}\right)^2+V$ と略記する. $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_d)$ は磁場を表すベクトルポテンシャル, V は電場を表すスカラーポテンシャルと呼ばれる.

量子力学の枠組みでは, 作用素 L は自己共役である事が要請される為, 通常 L の定義域に属する関数は何らかの境界条件を満たすと仮定する. よく用いられる境界条件としては, Dirichlet 境界条件 ($u=0$ on $\partial\Omega$), Neumann 境界条件 ($(\nabla-i\boldsymbol{a})u\cdot\nu=0$ on $\partial\Omega$) があるが, ここでは Robin 境界条件

$$(\nabla-i\boldsymbol{a})u\cdot\nu=-\sigma u \text{ on } \partial\Omega \tag{1.2}$$

を用い, それを満たす関数を定義域に持つ作用素 L の自己共役実現を H^R_Ω とおく. 但し, ν は境界における単位外法線ベクトル, $\sigma\in L^\infty(\partial\Omega;\boldsymbol{R})$ である. Dirichlet 境界条件は形式的には (1.2) で $\sigma=+\infty$ とした場合とみなせ, Neumann 境界条件は (1.2) で $\sigma=0$ とした場合である.

H^R_Ω に付随する二次形式は, 部分積分により

$$(H^R_\Omega u,u)_\Omega=\|(\nabla-i\boldsymbol{a})u\|^2_\Omega+(Vu,u)_\Omega+\int_{\partial\Omega}\sigma|u|^2dS, \tag{1.3}$$

となる. その定義域は

$$Q(H^R_\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\ |(\nabla-i\boldsymbol{a})u\in(L^2(\Omega))^d,V^{1/2}u\in L^2(\Omega)\}$$

であり, Ω の境界 $\partial\Omega$ にある程度の滑らかさを仮定すれば, (1.3) の右辺は下に有界な閉二次形式となり, 付随する自己共役作用素の存在が保証される. 特に $\sigma\leq 0$ の時には二次形

式 (1.3) に負の部分が生じる為, H_{Ω}^{R} は負固有値を持つ場合がある. $V\geq 0$ のとき, Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件の下での自己共役実現は負固有値を持たない. したがって, この負固有値の存在は境界条件を与える関数 σ が $\sigma\leq 0$ なる部分を持つ場合の Robin 境界条件に特有の現象と言える（この為, $\sigma\leq 0$ なる境界条件 (1.2) を特別に Steklov 境界条件と呼ぶ流儀もある（Gustafson-Abe[1] 参照）が, ここでは Egorov-El Aïdi[2] にならって $\sigma\leq 0$ の場合も Robin 境界条件という名称を使う事にする）.

以下,

$$\sigma\in L^{\infty}(\Omega),\ \sigma\leq 0 \tag{1.4}$$

を仮定し, 作用素 H_{Ω}^{R} の負の固有値の個数 $N_{-}(H_{\Omega}^{R})$ の評価を行う.

本稿ではポテンシャル V を非負としているが, もちろん V を負とする立場もある. 例えば, Egorov-El Aïdi[2] による次の結果がある：

Theorem 1.1 (Egorov-El Aïdi) *$d>2$, $\Omega=\boldsymbol{R}^{d-1}\times(0,\infty)$ とし, $q\geq d/2$, $q_1\geq d-1$ とする. このとき, d, q, q_1 に依存する正の定数 C_1, C_2 が存在して $V(x)\leq 0$, $V\in L^{q}(\boldsymbol{R}^{d-1}\times(0,\infty))$, $\sigma(x')\leq 0$, $\sigma\in L^{q_1}(\boldsymbol{R}^{d-1})$ かつ V, σ が compact な台を持てば,*

$$N_{-}(H_{\Omega}^{R})\leq C_1\int_{x_d>0}|V(x)|^{q}|x|^{2q-d}dx+C_2\int_{x_d=0}|\sigma(x')|^{q_1}|x'|^{q_1-d+1}dx'.$$

□

これに対し, V を非負とした場合は, 負固有値は負の境界関数 σ のみの影響により現れ, 非負のポテンシャル V は負固有値数を減少させる効果を持つ. したがって, この V の存在による負固有値数の減少効果についての評価, すなわち $N_{-}(H_{\Omega}^{R})$ の下からの評価は興味深いものと言える. 負のエネルギーを持つ固有関数は, σ が負の値を持つ境界から離れるにつれ, トンネル効果により指数関数的に減衰する事が予想される. このため, 負固有値数の減少効果は, 非負のポテンシャル V に, 境界から離れるにつれ指数関数的に減衰する重み関数をかけて平均した量により評価される事が期待される.

また, 磁場がある場合には, 磁場がない場合と比べて基底状態のエネルギーが高められる事は良く知られている（反磁性的不等式）. このため, 磁場の存在によっても, 負の境界関数 σ の影響で現れた負固有値数が減少する事が考えられる（ただし, この場合, 磁場によって負固有値数が増加する可能性がないとは言えない）. したがって, 磁場の存在下での負固有値数 $N_{-}(H_{\Omega}^{R})$ の下からの評価は, 興味ある問題と言える. この場合も磁場が無い時と同様に, 磁場 B に指数関数的に減衰する重み関数をかけて平均した量が, 負固有値数の減少についての何らかの指標を与える事が期待される.

以下ではこれらの予想を, まず１次元の場合（２節）, 磁場が無く次元が２以上の場合（３節）, 磁場があり次元が２の場合（４節）と別けて論ずる.

さらに, ２次元定数磁場の場合には, 半平面定数磁場中の Schrödinger 作用素の解析を用いて, 負のスペクトル及び負固有値をより精密に調べる事が出来る. 半平面定数磁場中の Schrödinger 作用素は, それ自身物理における量子ホール効果や端電流の問題との関わりに関心が持たれ, 近年多くの研究者によって詳しく解析されている（参考文献は Helffer-Morame[3] に詳しい）. 例えば, Dirichlet 境界条件の場合には De Bièvre-Pulé [4] により

解析されている．彼らの用いている基本的なアイデアは，作用素が x 軸方向について平行移動不変になるようなゲージを取り，x 変数に関し Fourier 変換を行う事により作用素を direct integral で表すというものである．それらの手法は Robin 境界条件の場合にも適用できる．これについても多少触れたい（5節）．

2　1次元系

1次元の半直線 $\boldsymbol{R}_+ = (0,\infty)$ を考え，σ は負の定数とする．この時，ゲージ変換により作用素 $H^R_{\mathbf{R}_+}$ は $\boldsymbol{a}=0$ としたものとユニタリ同値になるので，この節では以下 $\boldsymbol{a}=0$ とする．$V=0$ のとき，$H^R_{\mathbf{R}_+} = -\Delta^R_{\mathbf{R}_+}$ （$-\Delta = -\partial_x^2$ に Robin 境界条件 $u'(0)=\sigma u(0)$ を付けたもの）となる．簡単な計算により，

$$\mathrm{Spec}(-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}) = \{-\sigma^2\} \cup [0,\infty),$$

が分かる．固有値 $-\sigma^2$ の重複度は1で，対応する正規化された固有関数は $\psi_-(x) = \sqrt{2|\sigma|}e^{\sigma x}$ である．特に $\sigma<0$ ならば $N_-(-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}) = 1$ である．さらに，非負のポテンシャル V の存在の下では次が言える:

Proposition 2.1 $\sigma<0$, $V \in L^1_{loc}$ かつ $V \geq 0$ とする．このとき，

$$V_\sigma := 2|\sigma| \int_0^\infty V(x)e^{2\sigma x} < \sigma^2 \tag{2.5}$$

ならば $N_-(H^R_{\mathbf{R}_+}) = 1$ であり，負の固有値 λ_- について

$$-\sigma^2 \leq \lambda_- \leq -\sigma^2 + V_\sigma. \tag{2.6}$$

□

Proof. $V \geq 0$ だから，min-max principle より $N_-(H^R_{\mathbf{R}_+}) \leq N_-(-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}) = 1$. また，(2.5) より $\psi_- \in Q(H^R_{\mathbf{R}_+})$ であり，

$$\begin{aligned}
&(H^R_{\mathbf{R}_+}\psi_-, \psi_-) \\
=\;& (-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}\psi_-, \psi_-) + 2|\sigma| \int_0^\infty V(x)e^{2\sigma x} \\
=\;& -\sigma^2 + V_\sigma < 0.
\end{aligned}$$

よって min-max principle より $H^R_{\mathbf{R}_+}$ の最小固有値について (2.6) が成り立ち，特に $N_-(H^R_{\mathbf{R}_+}) \geq 1$ である．□

3　磁場が無い場合

空間次元 $d \geq 2$ で，磁場がない（$\boldsymbol{a}=0$）時の結果について述べる．領域は直積集合 $\Omega_\Gamma = \Gamma \times \boldsymbol{R}_+$（$\Gamma$ は $d-1$ 次元の有界開集合，$\boldsymbol{R}_+ = (0,\infty)$）とし，$\sigma$ は負の定数とする．d

次元ユークリッド空間の変数を $x=(x',x_d)$ （$x' \in \boldsymbol{R}^{d-1}$, $x_d \in \boldsymbol{R}$）と表す. Ω_Γ において境界の一部 $\Gamma \times \{0\}$ のみに Robin 境界条件を課し, その他には Dirichlet 境界条件を課した混合境界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x_d}(x',0) = \sigma u(x',0) \ \ (x' \in \Gamma), \ \ u(x',x_d) = 0 \ \ (x' \in \partial\Gamma, \ x_d \in (0,\infty)),$$

による作用素 $-\Delta + V$ の自己共役実現を $H^{RD}_{\Omega_\Gamma}$ とおく. この作用素の負固有値数 $N_-(H^{RD}_{\Omega_\Gamma})$ について, 次の評価を得た. 但し, 以下で記号 $N(\lambda; -\Delta^D_\Gamma)$ は $d-1$ 次元の開集合 Γ における Dirichlet 境界条件を付けた Laplacian $-\Delta^D_\Gamma$ の λ より真に小さい固有値の個数を表す:

Proposition 3.1 $V_\sigma := 2|\sigma| \int_0^\infty \sup_{x'\in\Gamma}(V(x',x_d))e^{2\sigma x_d}dx_d$ とおくと,

$$N(\sigma^2 - V_\sigma; -\Delta^D_\Gamma) \le N_-(H^{RD}_{\Omega_\Gamma}) \le N(\sigma^2; -\Delta^D_\Gamma).$$

特に, $V=0$ ならば全ての不等号は等号になる. □

V が境界付近である程度滑らかであれば, $\sigma \to -\infty$ のとき $V_\sigma \to \sup_{x'\in\Gamma} V(x',0)$ である. つまり, $|\sigma|$ が十分大きい時には V の影響はその端での値が大きな比率を占める事が分かる.

さらにこの結果は, 各辺に現れる作用素の Dirichlet 境界条件を全て Neumann 境界条件に取り替えても成り立つ（これは証明を見れば明らか）.

Proof. まず, 右側の不等号を示す. $V=0$ のとき, すなわち作用素 $-\Delta^{RD}_{\Omega_\Gamma}$ の負固有値は, 変数分離により $-\sigma^2 + \lambda_n(-\Delta^D_\Gamma)$ （$\lambda_n(-\Delta^D_\Gamma)$ は $d-1$ 次元の作用素 $-\Delta^D_\Gamma$ の重複度を込めて下から n 番目の固有値）の形で書ける事が分かる. よって, $N_-(-\Delta^{RD}_{\Omega_\Gamma}) = N(\sigma^2; -\Delta^D_\Gamma)$. min-max principle より, $V \ge 0$ ならば $N_-(H^R_{\Omega_\Gamma}) \le N_-(-\Delta^{RD}_{\Omega_\Gamma})$ であるから主張が従う.

左側の不等号を示すには, min-max principle の系として得られるよく知られた次の lemma を用いる.

Lemma 3.2 *A をある Hilbert 空間上の自己共役作用素, $Q(A)$ を A に付随する二次形式の定義域とする. $Q(A)$ の有限次元部分空間 W で,*

$$(Hu,u) < 0 \ \ {}^\forall u \in W, \ u \ne 0$$

を満たす物が存在すれば, $N_-(A) \ge \dim W$. □

部分空間 W_m として, $\{\phi_n(x')\psi_-(x_d)\}_{n=1,\cdots,m}$ が張る m 次元部分空間を取る. 但し, $\phi_n(x')$ は $-\Delta^D_\Gamma$ の固有値 $\lambda_n(-\Delta^D_\Gamma)$ に対応する正規化された固有関数であり, $\psi_-(x_d) = \sqrt{2|\sigma|}e^{\sigma x_d}$ は一次元の Robin-Laplacian $-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}$ の固有値 $-\sigma^2$ に対応する固有関数である. このとき, $u(x',x_d) = \sum_{n=1}^m c_n\phi_n(x')\psi_-(x_d) \in W_m$, $||u||=1$ に対し,

$$\begin{aligned}
&(Hu,u) \\
=\ & (-\Delta^{RD}_{\Omega_\Gamma}u,u) + (Vu,u) \\
\le\ & -\sigma^2 + \sum_{n=1}^m \lambda_n|c_n|^2 + \int_0^\infty \sup_{x'\in\Gamma}(V(x',x_d))|\psi_-(x_d)|^2dx_d \int_\Gamma |\sum_{n=1}^m c_n\phi_n(x')|^2dx' \\
\le\ & -\sigma^2 + \lambda_m + V_\sigma.
\end{aligned}$$

したがって, $\lambda_m < \sigma^2 - V_\sigma$ ならば W_m は Lemma 3.2 の仮定を満たす. これより Proposition 3.1 の主張が従う. □

Proposition 3.1 と Dirichlet-Neumann Bracketing (Reed-Simon[5] 参照), および min-max principle を用いれば次を得る:

Theorem 3.3 $\boldsymbol{R}^d_+ = \boldsymbol{R}^{d-1} \times \boldsymbol{R}_+$ とし, $\boldsymbol{a} = 0$, $V \geq 0$, $\sigma \in L^\infty(\Omega; \boldsymbol{R})$, $\sigma \leq 0$ とする. $r > 0$, $\boldsymbol{n}' = (n_1, \cdots, n_{d-1}) \in \boldsymbol{Z}^{d-1}$ に対し $Q_r(\boldsymbol{n}') := (n_1 r, (n_1+1)r) \times \cdots \times (n_{d-1} r, (n_{d-1}+1)r)$ とおく. このとき,

$$\sigma_{-,n'} := \operatorname*{ess.inf}_{x' \in Q_r(n')} \sigma(x'), \ \ \sigma_{+,n'} := \operatorname*{ess.sup}_{x' \in Q_r(n')} \sigma(x'),$$

$$V_{\sigma,n'} := 2|\sigma_{+,n'}| \int_0^\infty \sup_{x' \in Q_r(n')} (V(x', x_d)) e^{2\sigma_{+,n'} x_d} dx_d$$

とおけば,

$$\sum_{n' \in \mathbf{Z}^{d-1}} N(\sigma^2_{+,n'} - V_{\sigma,n'}; -\Delta^D_{Q_r(n')}) \leq N_-(H^R_{\mathbf{R}^d_+}) \leq \sum_{n' \in \mathbf{Z}^{d-1}} N(\sigma^2_{-,n'}; -\Delta^N_{Q_r(n')}). \tag{3.7}$$

□

ただし, Theorem 3.3 においては $N_-(H^R_{\mathbf{R}^d_+}) = \dim \operatorname{Ran} P_{(-\infty,0)}(H^R_{\mathbf{R}^d_+})$ であり (P はスペクトル射影), (3.7) の左辺が無限大になる場合には $\operatorname{Spec}(H^R_{\mathbf{R}^d_+}) \cap (-\infty, 0)$ が連続スペクトルになる場合もある (例えば $V = 0$ で σ が負の定数の時). 右辺, 左辺が共に正の有限値となる場合には負固有値の存在が言える.

Proof. 分割 $\boldsymbol{R}^{d-1} = \cup_{n' \in \mathbf{Z}^{d-1}} \overline{Q_r(\boldsymbol{n}')}$ に対して Dirichlet-Neumann bracketing (Reed-Simon [5], p270, Proposition 4 参照; 下で用いている主張と少し形が違うが修正は容易である) を用いると,

$$\sum_{n' \in \mathbf{Z}^{d-1}} N_-(H^{RD}_{Q_r(n')}) \leq N_-(H^R_{\mathbf{R}^d_+}) \leq \sum_{n' \in \mathbf{Z}^{d-1}} N_-(H^{RN}_{Q_r(n')}).$$

さらに, min-max principle を用いれば, 各 $Q_r(\boldsymbol{n}')$ において σ を $\sigma_{n',-}$ に取り替えた作用素の方が負固有値数は多くなり, σ を $\sigma_{n',+}$ に取り替えた作用素の方が負固有値数は少なくなる. この事と Proposition 3.1 を用いれば主張を得る. □

$N(\lambda; -\Delta^D_{Q_r(n')})$, $N(\lambda; -\Delta^N_{Q_r(n')})$ は計算可能な量であり,

$$\begin{aligned}
N(\lambda; -\Delta^D_{Q_r(n')}) &= \#\{\boldsymbol{n}' \in \boldsymbol{N}^{d-1} | \frac{\boldsymbol{n}'^2 \pi^2}{r^2} \leq \lambda_+\} \\
&= \frac{e_{d-1} r^{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \lambda_+^{(d-1)/2} - O((r\sqrt{\lambda})^{d-2}), \\
N(\lambda; -\Delta^N_{Q_r(n')}) &= \#\{\boldsymbol{n}' \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})^{d-1} | \frac{\boldsymbol{n}'^2 \pi^2}{r^2} \leq \lambda_+\} \\
&= \frac{e_{d-1} r^{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \lambda_+^{(d-1)/2} + O((r\sqrt{\lambda})^{d-2}).
\end{aligned}$$

但し, $O((r\sqrt{\lambda})^{d-2})$ は $r\sqrt{\lambda}\to\infty$ のとき $O((r\sqrt{\lambda})^{d-2})/|(r\sqrt{\lambda})^{d-2}|$ が有界となるような正の数であり, $\boldsymbol{e}_{d-1}$ は $d-1$ 次元の単位球の体積, $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\cdots\}$, $\lambda_+=\max(\lambda,0)$ である. この評価から, σ, V がある程度滑らかな時には, 負固有値数 $N_-(H^R_{\mathbf{R}^d_+})$ の大ざっぱな評価として, 上からは

$$\frac{\boldsymbol{e}_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}\int_\Omega |\sigma(x')|^{d-1}dx',$$

下からは

$$\frac{\boldsymbol{e}_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}\int_\Omega |(\sigma(x')^2-V|_\Gamma(x'))_+|^{(d-1)/2}dx'$$

が目安となる事が分かる（ただし, Theorem 3.3 における評価は r を小さくしても必ずしも良い評価とはならないので, これはあくまでも目安でしかない）. 特に, 上からの評価を見れば, Egorov-El Aïdi[2] の結果（Theorem 1.1）の $q_1=d-1$ における定数 C_2 の値は, $\frac{\boldsymbol{e}_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}$ が最善である事が分かる（もっとも, この値そのものを達成する事は困難と思われるが）.

4 磁場がある場合

2 次元空間内の直積領域 $\Omega_l:=(0,l)\times\boldsymbol{R}_+$ を考え, σ を負の定数とする. 2 次元空間内のユークリッド座標を x,y と表す. 与えられた磁場 $B(x,y)\in L^2_{loc}(\Omega_l)$ に対し, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ を

$$a_1(x,y)=-\int_0^y B(x,t)dt,\ a_2(x,y)=0$$

と取る. このとき, $\partial_x a_2-\partial_y a_1=B(x,y)$ を満たす. Ω_l において, 境界の一部 $(0,l)\times\{0\}$ のみに Robin 境界条件を課し, その他には Dirichlet 境界条件を課した混合境界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\sigma u(x,0)\ \ (x\in\Gamma),\ \ u(x,y)=0\ \ (x\in\partial\Gamma,\ y\in(0,\infty)),$$

による作用素 $(\frac{1}{i}\partial_x-a_1)^2+(\frac{1}{i}\partial_y)^2+V$ の自己共役実現を $H^{RD}_{\Omega_l}$ とおく. 作用素 $H^{RD}_{\Omega_l}$ の負固有値数 $N_-(H^{RD}_{\Omega_l})$ について, 次の下からの評価を得た:

Proposition 4.1 $B_\sigma:=\sqrt{\left(\int_0^\infty \sup_{x\in(0,l)}|B(x,y)|^2(y+\frac{1}{2|\sigma|})e^{2\sigma y}dy\right)}$ とおくと,

$$N_-(H^{RD}_{\Omega_l})\geq\left[\frac{(|\sigma|-B_\sigma)l}{\pi}\right]_-.$$

但し, 記号 $[r]_-$ は実数 r より真に小さい整数の内最大の物を表す.

Proof. Theorem 3.1 の証明と同様に, 適当な部分空間 W_n を構成し, Lemma 3.2 を用いる. W_m としては, $\{\sqrt{2/l}\sin(n\pi x/l)\sqrt{2|\sigma|}e^{\sigma y}\}$ $(n=1,\cdots,m)$ が張る部分空間を取る. $W_m\ni u(x,y)=\sum_{n=1}^m c_n\sqrt{2/l}\sin(n\pi x/l)\sqrt{2|\sigma|}e^{\sigma y}$, $||u||=1$ に対し,

$$(H^{RD}_{\Omega_l}u,u)=||\partial_x u-ia_1u||^2+||\partial_y u||^2+\sigma\int_0^l|u(x,0)|^2dx,$$

$$||\partial_x u - ia_1 u||^2 \le (||\partial_x u|| + ||a_1 u||)^2 \le (n\pi + ||a_1 u||)^2.$$

$\mathbf{B}(y) := \sup_{x\in(0,l)} |B(x,y)|$ と書くと,

$$\begin{aligned}||a_1 u||^2 &\le \int_0^\infty dy(\sup_{x\in(0,l)} |a_1(x,y)|^2) 2|\sigma| e^{2\sigma y} \\ &\le \int_0^\infty dy(\int_0^y \mathbf{B}(t)dt)^2 2|\sigma| e^{2\sigma y} \\ &\le 2|\sigma| \int_0^\infty dy \int_0^y dt \mathbf{B}(t)^2 y e^{2\sigma y} \\ &= 2|\sigma| \int_0^\infty dt \mathbf{B}(t)^2 \int_t^\infty y e^{2\sigma y} dy.\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\int_t^\infty y e^{2\sigma y} dy &= \left[y \frac{1}{2\sigma} e^{2\sigma y} \right]_t^\infty - \int_t^\infty \frac{1}{2\sigma} e^{2\sigma y} dy \\ &= \frac{1}{2|\sigma|} \left(t + \frac{1}{2|\sigma|} \right) e^{2\sigma t}\end{aligned}$$

を用いれば, $||a_1 u|| \le B_\sigma$ を得る. よって, $n < \frac{\sigma - B_\sigma}{\pi}$ ならば $(H_{\Omega_l}^{RD} u, u) \le (n\pi + ||a_1 u||)^2 - \sigma^2 < 0$ を満たす. これと Lemma 3.2 を用いれば主張を得る. □

再び Dirichlet-Neumann bracketing を用いれば次を得る（証明は Theorem 3.3 の左側の不等号の時と全く同様なので省略する）:

Theorem 4.2 $\boldsymbol{R}_+^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+$ とおく. $B = \partial_x a_2 - \partial_y a_1 \in L_{loc}^2(\boldsymbol{R}_+^2)$, $\sigma = \sigma(x) \in L^\infty(\boldsymbol{R};\boldsymbol{R})$, $\sigma \le 0$ とする. $l > 0$, $n \in Z$ に対し,

$$\sigma_{+,n} = \operatorname*{ess.sup}_{x\in(nl,(n+1)l)} \sigma(x)$$

とおき, $\sigma_{+,n} < 0$ なる n に対し,

$$B_{\sigma,n} := \sqrt{\left(\int_0^\infty \sup_{x\in(nl,(n+1)l)} |B(x,y)|^2 (y + \frac{1}{2|\sigma_{+,n}|}) e^{2\sigma_{+,n} y} dy \right)},$$

とおく. このとき,

$$N_-(H_{\mathbf{R}_+^2}^R) \ge \sum_{n\in\mathbf{Z},\ \sigma_{+,n}<0, |\sigma_{+,n}|>B_{\sigma,n}} \left[\frac{(|\sigma_{+,n}| - B_{\sigma,n})l}{\pi} \right]_- .$$

□

Theorem 3.3 と同様に, $N_-(H_{\mathbf{R}_+^2}^R) = \dim \mathrm{Ran} P_{(-\infty,0)}(H_{\mathbf{R}_+^2}^R)$ であり, $\mathrm{Spec}(H_{\mathbf{R}_+^2}^R) \cap (-\infty, 0)$ が連続スペクトルになる場合もあるが, この結果から, $|\sigma|$ が十分大きく, 磁場 B の境界付近での値が十分小さい時には H_Ω^R は少なくとも負の部分にスペクトルを持つ事が分かる. ポテンシャル V による摂動の時と異なり, 負固有値数の上からの評価は自明ではない.

5 半平面定数磁場中の Schrödinger 作用素

2次元半平面 $\boldsymbol{R}_+^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+$ において, 定数磁場 $B > 0$, 負の定数 σ に対し, 作用素 $L = (\frac{1}{i}\partial_x - By)^2 + (\frac{1}{i}\partial_y)^2$ の Robin 境界条件

$$\partial_y u(x,0) = \sigma u(x,0) \ \ (x \in \boldsymbol{R})$$

による自己共役実現を $H^R_{\mathbf{R}^2_+}$ とおく. x 変数についての Fourier 変換 $\mathcal{F}_x$ を

$$\mathcal{F}_x u(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x,y) dx$$

で定めると, $v \in L^2(\boldsymbol{R}_\xi \times \boldsymbol{R}_{+,y}) \cap \mathcal{F}_x D(H^R_{\mathbf{R}^2_+})$ （$D(A)$ は作用素 A の定義域）に対し,

$$\mathcal{F}_x H^R_{\mathbf{R}^2_+} \mathcal{F}_x^* v(\xi, y) = \left\{ (\xi - By)^2 + (\frac{1}{i}\partial_y)^2 \right\} v(\xi, y).$$

が成り立つ. $L^2(\boldsymbol{R}_\xi \times \boldsymbol{R}_{+,y}) = \int_{\mathbf{R}_\xi}^{\oplus} L^2(\boldsymbol{R}_{+,y}) d\xi$ と見れば, 次の direct integral decomposition（Reed-Simon [5], p280 参照）

$$H^R_{\mathbf{R}^2_+} = \int_{\mathbf{R}_\xi}^{\oplus} H_\xi d\xi \tag{5.8}$$

を得る. $H_\xi = -\partial_y^2 + (\xi - By)^2$ は $L^2(\boldsymbol{R}_{+,y})$ に作用する 1 次元 Schrödinger 作用素であり, 境界条件は $\partial_y v(0) = \sigma v(0)$ である. そのポテンシャル $(\xi - By)^2$ は $y \to +\infty$ で発散する為, H_ξ は固有関数の完全系を持つ事が分かる. その下から n 番目の固有値を $\lambda_n(\xi)$, それに対応する正規化された固有関数を $\phi_{n,\xi}(y)$ とする. $\xi \in \boldsymbol{R}$ の関数である $\lambda_n(\xi)$ は ξ について連続であり, 次の性質を満たす:

Proposition 5.1 (i) $\xi > 0$ が十分大きいとき, $\lambda_1(\xi) \geq 0$.
(ii) 各 $n \in \boldsymbol{N}$ について, $\xi \to -\infty$ のとき, $\lambda_n(\xi) \to +\infty$.
(iii) $n \geq 2$ のとき, $\lambda_n(\xi) \geq B$.□

実は, Hermite 関数による近似を用いれば $\lambda_n(\xi) \to (2n-1)B$ $(\xi \to +\infty)$ を満たす事も言えるが, ここでは用いないので証明は省略する（これは Dirichlet 境界条件の時にも成り立ち（De Bièvre-Pulé [2] 参照）, 証明もほとんど同様である）.

Proof. (i) 次を満たす正の定数 C が存在する事は容易に示せる（$\sigma < 0$ に注意）:

$$\sigma |v(0)|^2 \geq C\sigma \left(\epsilon^{-1} \int_0^1 |v(y)|^2 dy + \epsilon \int_0^1 |v'(y)|^2 \right). \tag{5.9}$$

但し, $0 < \epsilon < 1$, $v \in Q(H_\xi)$ であり, C は ϵ, v に依存しない. ここで ϵ として $C|\sigma|\epsilon < 1/2$ なる定数を一つ取って固定する. $\xi > 0$ が十分大きい時, $y \in (0,1)$ について $(\xi - By)^2 + C\sigma\epsilon^{-1} \geq 0$ となるので, (5.9) を用いれば, $v \in Q(H_\xi)$, $||v|| = 1$ に対して

$$(H_\xi v, v) = ||\partial_y v||^2 + ((\xi - By)^2 v, v) + \sigma |v(0)|^2 \geq 0 \tag{5.10}$$

となる. よって min-max principle より結論を得る.
(ii) $\xi < 0, y > 0$ の時 $(\xi - By)^2 \geq \xi^2$. したがって, (5.9) を用いて (5.10) の中辺の二次形式を下から評価すれば min-max principle より結論を得る.
(iii) 微分作用素 $-\partial_y^2 + (\xi - By)^2$ は, 固有値 B, それに対応する固有関数 $\psi_B(y) = e^{-\frac{B}{2}(y-\frac{\xi}{B})^2}$ を持つ. ψ_B は $y \in (0,\infty)$ に零点を持たないが, $n \geq 2$ の時, 固有値 $\lambda_n(\xi)$ に対応する固有関数 $\phi_{n,\xi}$ は $(0,\infty)$ に少なくとも一つの零点を持つ. よって, 固有関数の零点比較定理より $\lambda_n(\xi) \geq B$ を得る. □

分解 (5.8) と Proposition 5.1 及びその下の注釈より, $\mathrm{Spec}(H^R_{\mathbf{R}^2_+}) = \cup_n I_n$, $I_n = \overline{\cup_{\xi\in\mathbf{R}}\{\lambda_n(\xi)\}}$ となり, I_n は下に有界な半無限閉区間となる. さらに, 作用素 $H^R_{\mathbf{R}^2_+}$ のスペクトルの下端について次の評価を得た:

Theorem 5.2 $-\sigma^2 \leq \inf\ \mathrm{Spec}\ H^R_{\mathbf{R}^2_+} \leq -\sigma^2 + \frac{B^2}{4\sigma^2}$.□

Proof. (5.8) より $\inf \mathrm{Spec}(H) = \inf_\xi \inf \mathrm{Spec}(H_\xi)$ であるから, $\inf \mathrm{Spec}(H_\xi)$ を評価すれば良い. まず, 1 次元半直線 $\boldsymbol{R}_+$ 上の Robin-laplacian を $-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}$ と書くと, 二次形式の意味で $H_\xi \geq -\Delta^R_{\mathbf{R}_+}$ であるから, min-max principle より $\inf \mathrm{Spec}(H_\xi) \geq \inf \mathrm{Spec}(-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}) = -\sigma^2$. よって左側の不等号が示される. 右側の不等号については, $-\Delta^R_{\mathbf{R}_+}$ の正規化された固有関数を $\psi_-(y) = \sqrt{2|\sigma|}e^{\sigma y}$ とおくと, 簡単な計算より

$$\begin{aligned}(H_\xi\psi_-, \psi_-)_{\mathbf{R}_+} &= -\sigma^2 + 2|\sigma|\int_0^\infty (\xi - By)^2 e^{2\sigma y}dy \\ &= -\sigma^2 + (\xi - \frac{B}{2|\sigma|})^2 + \frac{B^2}{4\sigma^2}.\end{aligned}$$

この式と min-max principle により, $\inf_\xi \inf \mathrm{Spec}(H_\xi) \leq -\sigma^2 + \frac{B^2}{4\sigma^2}$ を得る. □

これにより, $|\sigma| > \sqrt{B/2}$ であれば, H は負のスペクトルを持つ事が分かる.
　再び 4 節で扱った直積領域 $\Omega_l = (0,l) \times \boldsymbol{R}_+$ を考え, Ω_l において, $(0,l) \times \{0\}$ 上では Robin 境界条件, $(\{0\} \cup \{l\}) \times \boldsymbol{R}_+$ では x 方向への周期境界条件を課した混合境界条件:

$$\partial_y u(x,0) = \sigma u(x,0)\ \ (x \in (0,l)),\ u(0,y) = u(l,y)\ \ (y \in \boldsymbol{R}_+)$$

による作用素 $L = (\frac{1}{i}\partial_x - By)^2 + (\frac{1}{i}\partial_y)^2$ の自己共役実現を $H^{RP}_{\Omega_l}$ とおく. $H^{RP}_{\Omega_l}$ の負固有値数 $N_-(H^{RP}_{\Omega_l})$ について次を得た:

Theorem 5.3 (i) $N_-(H^{RP}_{\Omega_l}) = \#\{m \in \boldsymbol{Z} | \lambda_1(2\pi m/l) < 0\}$.
(ii) $\displaystyle\lim_{l\to\infty}\frac{N_-(H^{RP}_{\Omega_l})}{l} = \frac{|\{\xi|\lambda_1(\xi) < 0\}|}{2\pi}$.□

但し, $\lambda_n(\xi)$ は先ほど定義した, 作用素 H_ξ の下から n 番目の固有値である. Proposition 5.1 の (i), (ii) より $\rho_- = \frac{|\{\xi|\lambda_1(\xi)<0\}|}{2\pi}$ は有限の値になる. (ii) によれば, $N_-(H^{RP}_{\Omega_l})$ は境界の幅 l にほぼ比例して増大し, その比例定数が ρ_- となる. したがって, 負固有値数の $l \to \infty$ における主要項を求めるには, 常微分作用素 H_ξ の最低固有値 $\lambda_1(\xi)$ が計算できれば良い

事になる．固有方程式 $H_\xi = \left\{(\xi - By)^2 - \partial_y^2\right\} v(y) = \lambda v(y)$ の解は Whittaker 関数（あるいは放物柱関数）で表される事が知られており，数値的に計算する事が可能である．さらに，min-max principle を用いれば，$N_-(H_{\Omega_l}^{RD}) \leq N_-(H_{\Omega_l}^{RP})$ が分かるので，これにより $N_-(H_{\Omega_l}^{RD})$ の上からの評価が得られる．

Proof. x 方向についての Fourier 級数展開の係数を与える作用素 $\mathcal{F}_x^l : L^2(\Omega_l) \to l^2(\boldsymbol{Z}) \otimes L^2(\boldsymbol{R}_y)$ を

$$\mathcal{F}_x^l u(m, y) = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l e^{-2m\pi ix/l} u(x, y) dx$$

で定義する．このとき，$v \in (l^2(\boldsymbol{Z}) \otimes L^2(\boldsymbol{R}_{+,y})) \cap \mathcal{F}_x^l D(H_{\Omega_l}^R)$ について

$$\mathcal{F}_x^l H_{\Omega_l}^{RP} \mathcal{F}_x^{l*} v(m, y) = \left\{ \left(\frac{2m\pi}{l} - By\right)^2 - \partial_y^2 \right\} v(m, y)$$

が成り立つ．$l^2(\boldsymbol{Z}) \otimes L^2(\boldsymbol{R}_{+,y}) = \oplus \sum_{m \in \boldsymbol{Z}} L^2(\boldsymbol{R}_{+,y})$ と見れば，作用素の直和分解

$$H_{\Omega_l}^{RP} = \oplus \sum_{m \in \boldsymbol{Z}} H_{2m\pi/l}$$

を得る．この分解及び Proposition 5.1 の (iii) より，(i) がただちに得られる．このとき，$\#\{m \in \boldsymbol{Z} | \lambda_1^q(2\pi m/l) < 0\}/l$ は $\boldsymbol{R}$ 上の集合 $\{\xi | \lambda_1(\xi) < 0\}$ の定義関数についての，区間の分割幅が $2\pi/l$ である Riemann 和を $1/(2\pi)$ 倍した物であるから，$\lambda_1(\xi)$ の連続性より (ii) が従う．$\square$

参考文献

[1] Gustafson, Karl; Abe, Takehisa; The third boundary condition—was it Robin's? *Math. Intelligencer* 20 (1998), no. 1, 63–71.

[2] Egorov, Yuri V.; El Aïdi, Mohammed; On the negative spectrum of an elliptic operator with Robin boundary conditions. (English. English, French summary) *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.* 329 (1999), no. 12, 1059–1063.

[3] Helffer, Bernard; Morame, Abderemane; Magnetic bottles in connection with superconductivity, preprint, mp-arc 00-452 (2000), (electronic; URL=http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=00-452).

[4] De Bièvre, Stephan; Pulé, Joseph V.; Propagating edge states for a magnetic Hamiltonian, *Math. Phys. Electron. J.* 5 (1999), Paper 3, 17 pp. (electronic; URL=http://www.ma.utexas.edu/mpej/MPEJ.html).

[5] Reed, M.; Simon, B.; *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV*, Academic Press, New York, 1987.